چند نکته در بحث مجموعه‌ها

نسرین نجیبی، دبیر ریاضی ناحیه یک شیراز

در بحث مجموعه‌ها، تعریف‌هایی در بعضی از جزوه‌ها و کتاب‌ها دیده می‌شود که با وجود اشتباه بودنشان، ظاهری درست و غلط‌انداز دارند. یکی از این موارد، اولین فصل کتاب درسی نهم است که به این مبحث پرداخته شده است. خوشبختانه با دید باز و انتقادپذیری که گروه تألیف دارند، پیش‌نویس این فصل را روی سایت دفتر تألیف قرار داده‌اند و برای دریافت نقد و بررسی کتاب، اعلام آمادگی نموده‌اند. لازم به ذکر است که بحث مجموعه‌ها، در پیش‌نویس یاد شده هم از بعضی ایرادات زیر، مصون نمانده است که البته موارد به دفتر تألیف، انتقال داده شده است. با توجه به مطالب ذکر شده، لازم دیدم در این نوشته، به چند مورد از این تعریف‌ها پرداخته و با ذکر مثال، مشکل آن‌ها را بررسی کنم.

برای ورود به مطلب، کافی است در درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر، تأمل کنیم:

۱. اشتراک دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای است که اعضای آن، هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B هستند. این مجموعه را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم.

۲. مجموعه $A-B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است که اعضای آن، عضو مجموعه A بوده، ولی عضو مجموعه B نباشند.

۳. مجموعه متناهی مجموعه‌ای است که ابتدا و انتها دارد.

۴. متمم مجموعه A، مجموعه‌ای است که اعضای آن، در مجموعه مرجع باشد ولی در A نباشد.

۵. اگر دو مجموعه مجزا باشند؛ متمم‌های آن‌ها مجزا نیستند.

البته همه عبارت‌های بالا نادرست هستند که در ادامه، دلیل نادرستی آن‌ها را به همراه مثال نقض بیان می‌کنیم.

برای بررسی عبارت‌های بالا، فرض کنید $M=\{۱و۲و۳و...و۹و۱۰\}$ مجموعه مرجع باشد و $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶\}$. حال اشکال هر تعریف را با یک مثال نشان داده و تعریف صحیح را پس از آن، ارائه می‌کنیم.

۱. بررسی ایراد عبارت «اشتراک دو مجموعه A وB، مجموعه‌ای است که اعضای آن، هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B هستند. این مجموعه را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، مجموعه $\{۳,۴\}$، مجموعه ای است که در تعریف فوق صدق می‌کند، یعنی مجموعه‌ای است که اعضای آن، هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B هستند. اما این مجموعه، $A\cap B$ نیست.هم‌چنین، مجموعه‌های $\{\}$ و $\{۵\}$ و $\{۳\}$ و $\{۴\}$ و $\{۳و۵\}$ و $\{۴و۵\}$ و $\{۳و۴و۵\}$، همه در این تعریف صدق می‌کنند، در حالی‌که $A\cap B=\{۳,۴,۵\}$.

یعنی؛ **همه زیرمجموعه‌های** $A\cap B$ در این تعریف صدق می‌کنند.

دلیل اینکه چنین مشکلی به‌وجود آمده این است که در تعریف ۱، در مورد این که مجموعه مورد نظر، باید چند

تا از اعضای مشترک را داشته باشد تا اشتراک دو مجموعه را نشان دهد، سکوت شده است.

و اما توصیه این است که به‌جای آن، نوشته شود:

اشتراک دو مجموعهٔ A و B، مجموعه همه عضوهایی است که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعه B هستند. این مجموعه را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم.

یا به عبارت ساده‌تر می‌توان گفت که **مجموعه همه عضوهای مشترکِ مجموعه‌های A و B را اشتراک دو مجموعه A و B می‌نامیم**.

در اینجا، بیان یا عدم بیان کلمه «**همه**»، نقشی اساسی در تعریف دارد.

۲. **بررسی ایراد عبارت** «مجموعه $A-B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است که اعضای آن، عضو مجموعه A بوده ولی عضو مجموعه B نباشند.»

در همان مثال بالا، مجموعه $\{۱\}$ را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه که در تعریف بالا صدق می‌کند (یعنی اعضای آن در A هست ولی در B نیست)، همان مجموعه $A-B$ است؟ البته خیر! پس ایراد از کجاست؟

ایراد از آنجایی است که وقتی $A-B$ تک عضوی یا تهی نباشد، بیش از یک مجموعه در این تعریف صدق می‌کند که در واقع، همان ایراد قبلی است، زیرا؛

همه زیرمجموعه‌های $A-B$، در این تعریف صدق می‌کنند.

پیشنهاد این است که تعریف کتاب، به‌صورت زیر اصلاح شود:

تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A-B$ (A منهای B)، مجموعه همه عضوهایی است که عضو مجموعه A بوده، ولی عضو مجموعه B نباشند.

در حقیقت، ما با **همه** عضوهایی که عضو مجموعه A بوده ولی عضو مجموعه B نباشند، مجموعه $A-B$ را می‌سازیم.

البته تجربه نشان داده که اگر $A-B$ را به‌صورت زیر بیان کنیم، برای دانش‌آموزان بهتر بوده و راحت‌تر آن را درک می‌کنند.

مجموعه عضوهایی از A که در B نباشند.

۳. **بررسی ایراد عبارت** «متمم مجموعه A مجموعه‌ای است که اعضای آن در مجموعه مرجع باشند ولی در A نباشد.»

مجموعه $\{۱۰\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه در تعریف فوق صدق می‌کند، ولی متمم مجموعه A نیست.

در حقیقت، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که در تعریف بالا صدق می‌کند، متمم این مجموعه است، یعنی:

متمم مجموعه A، مجموعه همه عضوهایی از مرجع است که در A نباشند.

ایراد هر سه تعریف، مشابه است.

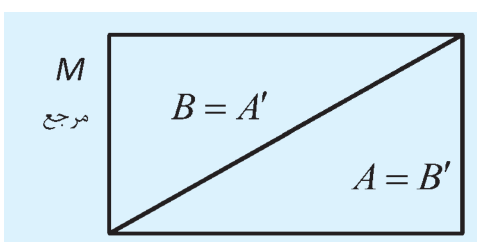
۴. **بررسی ایراد عبارت** «مجموعه متناهی مجموعه‌ای است که ابتدا و انتها دارد.»

متأسفانه، اکثر دانش‌آموزان تصور می‌کنند که این تعریف برای مجموعه متناهی، درست است و اگر در کلاس به این مطلب اشاره نشود، بر باور خود باقی می‌مانند. برای به چالش کشیدن این تصور،کافی است به مجموعه نامتناهی $\{x \mid ۱\le x\le ۲\}$ اشاره شود که ابتدا و انتهای آن معلوم هستند، ولی مجموعه نامتناهی است، چرا که نمی‌توان اعضای آن را شمرد و تعداد اعضای آن را مشخص کرد.

بسیاری از دانش‌آموزان با این تعریف دچار مشکل شده و آن را چنین تعبیر می‌کنند که «مجموعه متناهی، مجموعه‌ای است که اعضای آن مشخص باشند». حال آنکه مجموعه اعداد طبیعی، اعضای مشخصی دارد ولی چون تعداد آن‌ها محدود نیست و شمارش اعضای آن به پایان نمی‌رسد، مجموعه‌ای نامتناهی است. این تعبیرِ نادرست، ما را قانع می‌کند که بر **پایان‌پذیر بودن عمل شمارش اعضا و محدود بودن تعداد اعضا**، تأکید شود.

۵. **بررسی ایراد عبارت** «اگر دو مجموعه مجزا باشند؛ متمم های آن‌ها مجزا نیستند.»

مثال نقض این عبارت، در شکل زیر مشاهده می‌شود:



متأسفانه وقتی این مسائل را با دیگران در میان می‌گذاریم، بعضی از آن‌ها به‌جای پذیرفتن مطلب و اصلاح تعریف، فوراً زبان را زیر سؤال برده و این مطلب را مطرح می‌کنند که یکی از ایرادات زبان ما این است که نمی‌توان مطالب را درست ترجمه کرده و منظور را بیان کرد؛ در حالی‌که این موضوع فقط دقت ریاضی را می‌طلبد و زبان فارسی، مشکلی در بیان دقیق و ظریف مطالب بالا ندارد.

در پایان امیدوارم با این نوشته، گامی هر چند کوچک، در موفقیت آموزش ریاضی برداشته باشم.